Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Grado en Economía

Estimación de modelos no lineales

Presentado por:

Margarita Garrido García

Tutelado por:

Carmen Lorenzo Lago

Valladolid, 2 de septiembre de 2015

AGRADECIMIENTOS

La realización del presente trabajo ha sido posible gracias a la enorme paciencia y confianza que mi tutora, Carmen, ha depositado en mí en todo momento.

También me gustaría agradecer a mis padres, mi hermana y mis amigos su apoyo incondicional en los momentos difíciles.

De forma muy especial, hago mención a Rosalía. Infinitamente gracias.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.

Tal y como afirma Novales (1993), “la Teoría Económica deja, generalmente, indeterminada la forma funcional de las relaciones entre variables económicas, lo que sugiere que éstas pueden ser, en ocasiones, no lineales.”

En efecto, nos podemos encontrar, en multitud de casos, con modelos teóricos que incorporan formas funcionales no lineales. La función de producción Cobb-Douglas o la función de producción CES, entre otras, son ejemplos de estos modelos, con los que se trabaja de forma recurrente en Economía, de ahí la importancia de su modelización econométrica.

El objetivo del presente trabajo es llevar a cabo un estudio, lo más completo posible, acerca de los modelos de regresión no lineales y de las consecuencas inferenciales que la ausencia de la hipótesis de linealidad tiene sobre dichos modelos. Para ello, hemos intentado recopilar un variado número de ejemplos de regresiones no lineales y hemos tanto interpretado sus parámetros como expuesto los métodos de estimación oportunos y las implicaciones de su análisis inferencial.

El documento se divide en cinco apartados. En el primero de ellos se realiza un breve repaso del concepto y tipología de las formas funcionales que pueden adoptar los modelos de regresión, así como del contraste de forma funcional. El segundo habla sobre los modelos intrínsecamente lineales, recogiendo un buen número de especificaciones y ejemplos en el trabajo aplicado. El tercer apartado se reserva a los modelos de regresión intrínsecamente no lineales sobre los que se habla del método de estimación de mínimos cuadrados no lineales sistematizado a través del algoritmo Newton-Raphson y las propiedades de dichos estimadores. En el apartado quinto se lleva a cabo un análisis, a través del paquete informático Eviews, de la función de producción Cobb-Doublas, ejemplo de modelo intrínsecamente lineal, para España y se recogen las principales implicaciones inferenciales del análisis. El sexto y último apartado expone, brevemente, los principales resultados y conclusiones que se extraen de este trabajo.

2. FORMA FUNCIONAL. CONTRASTE RESET DE RAMSEY.

La forma funcional de un modelo econométrico hace referencia a cómo está especificada la relación entre la variable endógena y las variables exógenas de la regresión. Esta relación queda definida tanto en las variables como en los parámetros del modelo, pudiendo ser lineal o no lineal.

La aceptación o el rechazo de la hipótesis de linealidad es fundamental para seleccionar los métodos de inferencia y estimación más apropiados y, además, la forma funcional es decisiva a la hora de interpretar los coeficientes que acompañan a los regresores y que cuantifican la dependencia entre la variable explicada y las variables explicativas.

2.1. MODELO DE REGRESIÓN LINEAL.

En el modelo de regresión lineal, existe linealidad tanto en los parámetros como en las variables. De manera sencilla e intuitiva, el modelo se especifica de la siguiente forma[1]:

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{K} \beta_i X_{it} + U_t \qquad \textbf{(2.1)}$$

En este caso, los coeficientes se interpretan como la variación, en términos absolutos, que experimenta la variable endógena al aumentar, en una unidad, una variable explicativa del modelo, manteniéndose el resto de regresores constantes. Es decir, los parámetros β que, suponemos, son constantes a lo largo del tiempo, captan el efecto marginal de una variable exógena sobre la variable dependiente de la regresión:

$$\beta_i = \frac{\partial Y}{\partial X_i}$$

En los modelos de regresión lineales, se aplican métodos lineales de estimación, los oportunos, dependiendo de si el modelo cumple, o no, las

[1] Para una regresión con K regresores y término constante. A partir de ahora, y durante el desarrollo del trabajo, consideraremos, para las especificaciones genéricas, un modelo con K variables explicativas e intercepto, salvo que se indique lo contrario.

hipótesis clásicas y si existen, o no, errores de especificación en la regresión, como los relacionados con la perturbación aleatoria.

2.2. MODELO DE REGRESIÓN NO LINEAL.

El modelo de regresión no lineal se expresa, de forma genérica, de la siguiente manera:

$$Y_t = f(X_t, \beta) + U_t \qquad \textbf{(2.2)}$$

donde $f(X_t, \beta)$ es una función no lineal de los elementos de los vectores de X_t y β.

Hablamos de modelo econométrico no lineal cuando nos encontramos ante cualquiera de estas tres situaciones:

1. Hay linealidad en variables pero no en parámetros.
2. Los parámetros presentan linealidad, pero las variables no.
3. No existe linealidad ni en variables ni en parámetros.

En la práctica, resulta de especial atención la forma funcional en los parámetros. La no linealidad en las variables puede corregirse fácilmente mediante un cambio de denominación de las mismas, de tal forma que el modelo transformado sea lineal -en las variables-. Sin embargo, si la no linealidad afecta a los coeficientes, el modelo es, o no, susceptible de ser linealizado.

Los modelos econométricos no lineales que adopten cualquiera de las tres formas descritas anteriormente pueden clasificarse, atendiendo a la posibilidad de ser, o no, linealizados, en:

— Modelos intrínsecamente lineales: Son aquellos modelos no lineales en variables y/o en parámetros fácilmente transformables en modelos lineales, por lo que se puede aplicar métodos lineales de estimación.

— Modelos intrínsecamente no lineales: Son aquellos modelos no lineales en los parámetros que no pueden ser linealizados, de tal manera que sea necesario utilizar métodos de estimación no lineales.

2.3. CONTRASTE RESET DE RAMSEY.

Especificar adecuadamente la forma funcional de un modelo econométrico –en ausencia de otros errores de especificación- es una garantía de un buen ajuste de la regresión, de unas propiedades deseables de los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios, así como de unos estadísticos fiables para realizar contrastes. Es por ello que, cuando no contamos con información a priori acerca de la forma funcional de un determinado modelo econométrico, se hace necesario un mecanismo que pruebe que la especificación pensada inicialmente para el modelo es, efectivamente, la correcta.

El contraste Reset de Ramsey nos permite detectar si la dependencia entre la variable endógena y las variables explicativas de una regresión responde a una relación lineal o no. Sus hipótesis son las siguientes:

$$H_0: \nexists\ error\ forma\ funcional\ o\ modelo\ lineaL$$
$$H_1: \exists\ error\ forma\ funcional\ o\ modelo\ no\ lineaL$$

Para realizar el test, partimos de un modelo econométrico lineal –como el modelo (2.1)-, del cual obtenemos los valores de la endógena estimada:

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^{K} \hat{\beta}_i X_{it}$$

Las estimaciones de la variable dependiente elevadas a una potencia se incorporan como regresores al modelo inicial. Suponiendo que se introducen N potencias, tenemos:

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{K} \beta_i X_{it} + \sum_{l=1}^{N} \alpha_l \hat{Y}_t^{l+1} + U_t$$

A continuación, realizamos el contraste de significación conjunta de las potencias de la endógena estimada:

$$H_0: \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_1: \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si no rechazamos la hipótesis nula, las potencias de la estimación de la variable explicada no son significativas y, por lo tanto, el modelo inicial es lineal. Si, por el contrario, rechazamos la hipótesis nula, se concluye que la regresión no es lineal y, en consecuencia, existe un error de especificación en la forma funcional.

Tal y como queda ilustrado en el procedimiento anterior, la especificación incorrecta de la forma funcional de un modelo econométrico se reduce, sencillamente, a un problema de omisión de variables relevantes -en este caso, las potencias de la endógena estimada-, lo cual tiene consecuencias negativas para la estimación y la inferencia de la regresión mal especificada. Los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios son sesgados e inconsistentes y los contrastes basados en los estadísticos t y F no son válidos, ya que se rompe con la hipótesis de $EU \neq 0$.

3. MODELOS INTRÍNSECAMENTE LINEALES.

Los modelos intrínsecamente lineales son regresiones no lineales en variables, en parámetros o en ambos que pueden ser linealizadas mediante sencillas transformaciones, tales como la aplicación de logaritmos o un cambio de nombre de variables.

3.1. TIPOLOGÍA.

La Teoría Económica utiliza, de manera recurrente, formas funcionales no lineales para modelizar escenarios macro y microeconómicos. A pesar de que los modelos no lineales son muy numerosos, en esta sección estudiaremos sólo algunas especificaciones[2], las más habituales en el trabajo aplicado en Economía, que dan lugar a regresiones intrínsecamente lineales.

3.1.1. Modelo doble-logarítmico.

Es un modelo no lineal en las variables cuya especificación es la siguiente:

---

[2] Las formas funcionales que pueden adoptar los modelos econométricos, y que se analizan una a una en esta sección, pueden verse combinadas en una misma regresión, de tal forma que podemos encontrarnos con modelos logarítmicos y términos cuadráticos, polinomios y variables invertidas, etc.

$$Y_t = A \prod_{i=1}^{K} X_{it}^{\beta_i} e^{U_t} \quad \textbf{(3.1)}$$

Tal y como se puede intuir, la especificación (3.1) corresponde a una regresión intrínsecamente lineal, ya que es susceptible de ser linealizada aplicando logaritmos y renombrando las variables, de tal forma que tanto la variable endógena como las explicativas quedan expresadas como funciones logarítmicas –de ahí su denominación ‘doble logarítmico’-:

$$lnY_t = lnA + \sum_{i=1}^{K} \beta_i lnX_{it} + U_t$$

$$y_t = \alpha + \sum_{i=1}^{K} \beta_i x_{it} + U_t$$

donde $y_t = lnY_t$, $x_{it} = lnX_{it}$ y $\alpha = lnA$.

En este tipo de modelos econométricos, los coeficientes que acompañan a los regresores se definen como elasticidades, de manera que los parámetros β miden la variación porcentual que experimenta la variable endógena ante un incremento del 1% de la variable explicativa correspondiente, ‘céteris páribus’:

$$\beta_i = \frac{dY}{dX_i}\frac{X_i}{Y}$$

Ejemplo: función de producción Cobb-Douglas.

La conocida función de producción neoclásica Cobb-Douglas relaciona el nivel de producción de un determinado bien o conjunto de bienes con los factores productivos, trabajo y capital, empleados para su obtención:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

donde Y es la producción, K y L los factores capital y trabajo, respectivamente y A la productividad total de los factores, que se considera como un coeficiente a estimar. Los parámetros α y β representan la elasticidad de la producción en relación al capital y al trabajo, respectivamente.

Esta función de producción satisface una serie de propiedades económicas, las cuales se consideran deseables en el trabajo aplicado:

— Rendimientos constantes a escala.

— Incidencia positiva del factor tecnológico.

A consecuencia de estas propiedades teóricas, se imponen ciertas condiciones o restricciones sobre los parámetros, de tal forma que sabemos que $\alpha + \beta = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $A > 0$.

El modelo econométrico intrínsecamente lineal se obtiene indexando las variables endógena y explicativas con el subíndice t e introduciendo la perturbación aleatoria:

$$Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{\beta} e^{U_t}$$

3.1.2. Modelo semi-logarítmico.

La expresión 'semi-logarítmico' hace referencia a la transformación implícita de que son objeto algunos modelos econométricos no lineales, de tal forma que, o bien, la variable endógena, o bien, las variables exógenas de la regresión se ven afectadas por logaritmos.

En este tipo de regresiones, los parámetros se interpretan como semi-elasticidades, ya que relacionan variaciones en términos absolutos con variaciones en términos porcentuales.

Una de las expresiones más habituales en esta clase de modelos econométricos es la siguiente:

$$Y_t = e^{\sum_{i=1}^{K} X_{it} + U_t} \quad \textbf{(3.2)}$$

Aplicando logaritmos a ambos lados de la igualdad y renombrando la variable endógena, llegamos a obtener una especificación lineal de la regresión (3.2):

$$lnY_t = \alpha + \sum_{i=1}^{K} \beta_i X_{it} + U_t$$

$$y_t = \alpha + \sum_{i=1}^{K} \beta_i X_{it} + U_t$$

siendo $y_t = lnY_t$.

En este caso, los coeficientes β expresan la variación relativa que experimenta la variable endógena cuando, manteniéndose todo lo demás constante, una de las variables exógenas del modelo aumenta en una unidad:

$$\beta_i = \frac{dY}{dX_i} \frac{1}{Y}$$

En términos porcentuales:

$$\beta_i \times 100 = \frac{dY \times 100}{dX_i} \frac{1}{Y}$$

Cuando una de las variables explicativas del modelo, X_i, aumenta en una unidad, manteniéndose el resto constantes, la variable endógena varía un $(\beta_i \times 100)$ %.

También podemos encontrarnos con la siguiente especificación:

$$e^{Y_t} = A \prod_{i=1}^{K} X_{it}^{\beta_i} e^{U_t} \qquad \textbf{(3.3)}$$

Llevando a cabo el mismo proceso de transformación que en la regresión (3.2), obtenemos una aproximación lineal del modelo econométrico (3.3):

$$Y_t = lnA + \sum_{i=1}^{K} \beta_i \, lnX_{it} + U_t$$

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=1}^{K} \beta_i \, X_{it}^{*} + U_t$$

donde $\alpha = lnA$ y $X_{it}^{*} = lnX_{it}$.

En este tipo de regresiones, los coeficientes β miden la variación, en términos absolutos, que experimenta la variable endógena cuando la variable X_i se incrementa $0{,}01$ unidades:

$$\beta_i = \frac{dY}{dX_i} X_i$$

En términos porcentuales, ante un incremento del 1% de la variable explicativa X_i, la variable endógena varía $(\beta_j/100)$ unidades.

Ejemplo: relación salario-educación.

Wooldridge (2001) propone, como ejemplo de modelo semi-logarítmico, una relación entre el nivel salarial y los años de educación.

$$salario = e^{\alpha+\beta educaci\acute{o}n}$$

Al aplicar logaritmos para linealizar la función obtenemos la siguiente transformación:

$$\ln(salario) = \alpha + \beta educación$$

Con el logaritmo afectando únicamente a la variable endógena –el salario-, el coeficiente β se interpreta como la tasa constante a la que crece el salario al dedicar un año adicional a la educación.

Introduciendo los subíndices t y la perturbación aleatoria al modelo inicial, queda especificada la regresión en términos econométricos:

$$salario_t = e^{\alpha+\beta educaci\acute{o}n_t+U_t}$$

3.1.3. Modelo recíproco o inverso.

El modelo econométrico inverso presenta la siguiente especificación:

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=1}^{K} \beta_i \frac{1}{X_{it}} + U_t \qquad \textbf{(3.4)}$$

En este caso, el modelo se puede linealizar mediante un sencillo cambio de nombre de las variables explicativas:

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=1}^{K} \beta_i X_{it}^{*} + U_t$$

donde $X_{it}^{*} = \frac{1}{X_{it}}$.

La interpretación de los parámetros β se observa fácilmente hallando la derivada parcial de la regresión (3.4) con respecto a cada uno de los regresores del modelo:

$$\frac{\partial Y}{\partial X_i} = -\beta_i \frac{1}{{X_i}^2}$$

Ante un incremento de X_i en una unidad, la variable endógena Y varía $-\beta_i \frac{1}{{X_i}^2}$ unidades.

Ejemplo: curva de Phillips.

La curva de Phillips constituye una de las aportaciones más relevantes en la Ciencia Económica, estableciendo una relación inversa entre la inflación – la cual viene dada por la tasa de crecimiento del salario nominal- y la tasa de desempleo en una economía.

Teóricamente, y de manera sencilla, el modelo económico se expresa de la siguiente forma:

$$w = \gamma + \eta \frac{1}{d}$$

donde w es la tasa de crecimiento del salario nominal y d el exceso de oferta de trabajo o desempleo.

Incorporando los subíndices de tiempo t y el término de error, queda especificado el modelo econométrico:

$$w_t = \gamma + \eta \frac{1}{d_t} + U_t$$

Renombrando la variable explicativa obtenemos la siguiente especificación lineal:

$$w_t = \gamma + \eta {d^*}_t + U_t$$

donde ${d^*}_t = \frac{1}{d_t}$.

3.1.4. Modelo polinómico.

Otra especificación habitual de los modelos econométricos es la polinómica, la cual introduce potencias de las variables exógenas. Suponiendo una regresión con una única variable independiente, el polinomio de grado N se expresa así:

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{l=1}^{N} \beta_l X_t^l + U_t \qquad \textbf{(3.5)}$$

Este tipo de modelos econométricos se pueden escribir como regresiones lineales renombrando, simplemente, las potencias de las variables explicativas.

En nuestro ejemplo particular, el modelo transformado resultante es el siguiente:

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{l=1}^{N} \beta_l W_{lt} + U_t$$

donde $W_{1t} = X_t, W_{2t} = X_t^2, \dots, W_{Nt} = X_t^N$.

La interpretación de los parámetros β se observa fácilmente calculando la derivada parcial de la regresión (3.5) con respecto a las variables explicativas. Siguiendo con nuestro modelo ilustrativo:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \beta_1 + 2\beta_2 X + \cdots + N\beta_N X^{N-1}$$

Ante un aumento de una unidad en la variable exógena, la variable dependiente varía $\beta_1 + 2\beta_2 X + \cdots + NX^{N-1}$ unidades, de tal forma que la variación depende del valor que tome la variable explicativa.

Ejemplo: función de costes polinómica de tercer grado.

Las funciones polinómicas de segundo y tercer grado se emplean con frecuencia en la Economía Aplicada para captar productividades o costes marginales crecientes o decrecientes.

Los polinomios cúbicos o de grado tres desempeñan un papel razonablemente destacado en la modelización de las funciones de costes en la Microeconomía. No obstante, hay que tener en cuenta que estas funciones cúbicas no pueden plantearse aleatoriamente, sino que los coeficientes del modelo deben cumplir ciertas condiciones, de tal forma que sean consistentes con la Teoría Económica. Algunos de estos condicionantes hacen referencia a la existencia de costes totales y fijos positivos, funciones de costes totales crecientes, garantía de costes medios mínimos, y funciones de costes marginales y medios parabólicas convexas.

Así, el modelo teórico, resultante sería el siguiente:

$$CT = a + bq + cq^2 + dq^3$$

donde CT denota los costes totales y q la producción.

En cuanto a las restricciones de los parámetros β, tendríamos $a > 0$, $c < 0$, $d > 0$ y $3db > c^2$.

Introduciendo los subíndices temporales t y la perturbación aleatoria U, queda especificado el modelo econométrico intrínsecamente lineal:

$$CT_t = a + bq_t + cq_t^2 + dq_t^3 + U_t$$

3.2. MÉTODOS DE ESTIMACIÓN.

Los modelos intrínsecamente lineales son susceptibles de ser linealizados mediante sencillas transformaciones matemáticas, de tal manera que les pueden ser aplicados los métodos de estimación e inferencia propios de las regresiones lineales.

Suponiendo que el modelo intrínsecamente lineal, una vez transformado en un modelo lineal, cumple las hipótesis clásicas, el método de estimación adecuado a aplicar es el de mínimos cuadrados ordinarios.

Este procedimiento consiste en minimizar la suma de los cuadrados de los residuos – definidos como la diferencia entre el verdadero valor y la estimación de la endógena estimada-, lo cual resulta en la obtención del estimador de mínimos cuadrados ordinarios, cuya expresión matricial es la siguiente:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

- El estimador MCO (mínimos cuadrados ordinarios) satisface todas las propiedades estadísticas deseables:
- Es lineal: Depende linealmente de la variable endógena, que es aleatoria.
- Es insesgado: Por término medio, toma el mismo valor que el parámetro.
- Es eficiente: Su varianza alcanza la cota de Cramer-Rao –el valor mínimo que puede tomar la varianza de un estimador insesgado-.
- Es óptimo: Tiene la varianza más pequeña dentro de la familia de estimadores lineales e insesgados.
- Es consistente: Converge en probabilidad al verdadero valor del parámetro.

— Coincide con el estimador máximo verosímil: Comparte sus propiedades asintóticas: insesgadez asintótica, eficiencia asintótica, consistencia e invarianza.
— Sigue una distribución de probabilidad normal: Es función lineal de la variable endógena y, en consecuencia, de la perturbación, la cual sigue una distribución normal. Todo lo que depende linealmente de una variable aleatoria que sigue una distribución normal, también se distribuye normalmente.
— El estimador de su matriz de varianzas y covarianzas, $S_{\hat{\beta}\hat{\beta}} = \frac{e^{'}e}{T-K-1}(X^{'}X)^{-1}$, es insesgado.

También bajo cumplimiento de las hipótesis clásicas, los estadísticos t y F siguen manteniendo su validez en los modelos intrínsecamente lineales. Además, cabe recordar que los coeficientes de determinación R^2 y $\bar{R}^2$ no resultan válidos a la hora de comparar modelos econométricos con distinta variable endógena, por lo que hay que prestar especial atención al caso de los modelos doble y semi-logarítmicos, en los que la variable dependiente se ve afectada por logaritmos.

Por otra parte, a modo de observación, cuando un parámetro de la regresión intrínsecamente lineal sufre algún tipo de transformación no lineal como consecuencia del proceso de linealización, el estimador MCO de dicho coeficiente satisface, únicamente, las propiedades asintóticas del estimador máximo verosímil descritas anteriormente. Este es el caso del modelo doble-logarítmico en el que se aplica logaritmo sobre el término independiente.

4. MODELOS INTRÍNSECAMENTE NO LINEALES.

Los modelos intrínsecamente no lineales son regresiones no lineales en los parámetros -con independencia de si presentan, o no, linealidad en las variables- que no pueden ser linealizadas.

Algunos ejemplos de estos modelos econométricos no lineales y no linealizables son los siguientes:

$$Y_t = \beta_1 e^{\beta_2 X_t} + U_t \quad \textbf{(4.1)}$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t^{\beta_2} + U_t$$

$$Y_t = \frac{\beta_0}{1 + e^{\beta_1 + \beta_2 X_t} + U_t}$$

Como podemos, comprobar, no existe transformación sencilla alguna que permita corregir la no linealidad en los coeficientes.

Ejemplo: función de producción CES

En Economía, la función de producción de elasticidad de sustitución constante o función de producción CES –'Constant Elasticity of Substitution'¸ en inglés-constituye un claro ejemplo de modelo no lineal en sentido estricto, es decir, no susceptible de ser linealizado.

Su expresión es la siguiente:

$$Y = A\left[\delta K^{-\beta} + (1 - \delta)L^{-\beta}\right]^{-v/\beta}$$

donde Y representa la producción, K el factor capital, L el recurso productivo trabajo, A es el parámetro de eficiencia referente al estado de la tecnología, δ el denominado parámetro de distribución que indica la participación relativa de cada factor en la producción, β el parámetro de sustitución y v el parámetro relativo a los rendimientos a escala.

La función de producción CES cumple ciertas propiedades teóricas que requieren que los coeficientes tomen determinados valores de entre un intervalo numérico, de tal forma que sean coherentes con la Teoría Económica. Estas propiedades son:

- Homogeneidad de grado uno[3], lo que significa rendimientos constantes a escala. Se ha de cumplir que $v = 1$.
- Participaciones relativas de cada insumo en la producción positivas y menores que la unidad ($0 < \delta < 1$).
- Efecto tecnológico positivo, por lo que $A > 0$.

[3] La función de producción de elasticidad de sustitución constante no tiene por qué ser necesariamente homogénea de grado uno, aunque en este trabajo se acepta ese supuesto por simplicidad.

— Elasticidad de sustitución constante, positiva y menor que la unidad. Teniendo en cuenta que la elasticidad de sustitución del modelo viene dada por la siguiente expresión[4]:

$$\sigma = \frac{1}{1+\beta}$$

donde σ representa la elasticidad de sustitución, se tiene que cumplir que $\beta > -1$. Además, $\beta \neq 0$ para que el exponente $-{}^{v}/_{\beta} \neq \infty$.

El modelo econométrico, indexando las variables endógena y explicativas e introduciendo el término de error estocástico, queda especificado así:

$$Y_t = A\left[\delta K_t{}^{-\beta} + (1-\ \delta)L_t{}^{-\beta}\right]^{-v/\beta} e^{\ \ t}$$

4.1. MÉTODOS DE ESTIMACIÓN.

El procedimiento basado en la minimización de la suma de los cuadrados de los residuos de una regresión del que hablábamos en la sección anterior parece un criterio bastante atractivo a la hora de estimar los parámetros de un modelo econométrico, ya que nos permitiría obtener estimadores con buenas propiedades.

De manera análoga a los modelos lineales o los modelos intrínsecamente lineales, podríamos aplicar el método de minimización de la suma residual a las regresiones intrínsecamente no lineales, aunque, debido a las características propias de éstas, la resolución analítica de este mecanismo de estimación se complica.

La principal dificultad del método de mínimos cuadrados no lineales –así se denomina el procedimiento de mínimos cuadrados para los modelos no lineales en sentido estricto- surge a la hora de resolver las ecuaciones normales de la regresión.

[4] Esta expresión se obtiene operando algebraicamente sobre la función de producción a partir de la definición de elasticidad de sustitución. La elasticidad de sustitución se define, en este caso, como la variación porcentual que experimenta el ratio óptimo capital/trabajo al aumentar un 1% el cociente del precio de los insumos trabajo y capital, es decir, el ratio salario/tipo de interés.

Considerando el modelo no lineal (2.2), la suma de los cuadrados de los residuos se expresa así:

$$SR(\beta) = \sum_{t=1}^{T} \widehat{U}_t^2 == \sum_{t=1}^{T} (Y_t - \widehat{Y}_t)^2 = \sum_{t=1}^{T} (Y_t - f(X_t, \hat{\beta}))^2 \qquad \textbf{(4.2)}$$

Derivando la expresión (4.2) con respecto a cada uno de los parámetros que componen la matriz β e igualando a cero, obtenemos $K+1$ ecuaciones normales:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial SR(\beta)}{\partial \hat{\beta}_0} = -2 \sum_{t=1}^{T} \left[\left(Y_t - f(X_t, \hat{\beta})\right) \dfrac{\partial f(X_t, \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_0} \right] = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial SR(\beta)}{\partial \hat{\beta}_k} = -2 \sum_{t=1}^{T} \left[\left(Y_t - f(X_t, \hat{\beta})\right) \dfrac{\partial f(X_t, \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}_k} \right] = 0 \end{cases}$$

A modo de ilustración, trabajamos con el modelo (4.1):

$$Y_t = \beta_1 e^{\beta_2 X_t} + U_t$$

donde la suma residual a minimizar es:

$$SR(\beta) = \sum_{t=1}^{T} (Y_t - \hat{\beta}_1 e^{\widehat{\beta}_2 X_t})^2 \qquad \textbf{(4.3)}$$

Igualando a cero las derivadas parciales de la expresión (4.3) con respecto a cada uno de los parámetros, damos con el siguiente sistema de ecuaciones normales:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial SR(\beta)}{\partial \hat{\beta}_1} = 2 \sum_{t=1}^{T} \left(Y_t - \hat{\beta}_1 e^{\widehat{\beta}_2 X_t}\right)\left(-e^{\widehat{\beta}_2 X_t}\right) = 0 \rightarrow \sum_{t=1}^{T} e^{\widehat{\beta}_2 X_t} Y_t = \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^{T} e^{2\widehat{\beta}_2 X_t} \\ \dfrac{\partial SR(\beta)}{\partial \hat{\beta}_2} = -2 \sum_{t=1}^{T} (Y_t X_t \hat{\beta}_1 e^{\widehat{\beta}_2 X_t} - \hat{\beta}_1{}^2 X_t e^{2\widehat{\beta}_2 X_t}) = 0 \rightarrow \sum_{t=1}^{T} Y_t X_t e^{\widehat{\beta}_2 X_t} = \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^{T} X_t e^{2\widehat{\beta}_2 X_t} \end{cases} \qquad \textbf{(4.4)}$$

El sistema (4.4) presenta dos problemas fundamentales:

1. Las ecuaciones no son lineales, ya que las derivadas parciales de la función no lineal $f(X_t, \hat{\beta})$ tampoco son lineales. La resolución simultánea de un sistema de ecuaciones no lineales puede conducirnos a varias soluciones o, incluso, a ninguna, de tal manera que el modelo econométrico intrínsecamente no lineal puede tener varios estimadores mínimo cuadráticos o, ni siquiera, tenerlos.

2. Las ecuaciones tienen incógnitas –los estimadores- a ambos lados de la igualdad y, por lo tanto, no podemos obtener soluciones explícitas de las incógnitas en términos de los valores conocidos.

Debido a estos inconvenientes, es preciso buscar otros métodos que nos permitan obtener los estimadores de mínimos cuadrados de una regresión intrínsecamente no lineal, lo cual implica procedimientos numéricos o algoritmos. A pesar de que existen varias alternativas para la estimación no lineal, tales como el mecanismo de búsqueda directa, el método Marquard o el algoritmo de descenso más rápido, el procedimiento quizá más intuitivo y utilizado sea el método iterativo de linealización.

El método de linealización iterativa consiste en linealizar, alrededor de un conjunto inicial de valores de los parámetros y con ayuda del desarrollo en serie de Taylor, el modelo intrínsecamente no lineal. A continuación, se estima la aproximación lineal mediante mínimos cuadrados ordinarios para obtener nuevos valores de los coeficientes. Este proceso se realiza reiteradas veces hasta alcanzar la convergencia, es decir, hasta que las nuevas estimaciones de los parámetros obtenidas en cada iteración no varíen de forma significativa.

El mecanismo iterativo de linealización se sistematiza a través de algoritmos de optimización, de los cuales, los más utilizados son Newton-Raphson y Gauss-Newton. Nosotros sólo desarrollaremos el de Newton-Raphson, ya que el algoritmo de Gauss-Newton se considera una variante del primero.

4.1.1. Algoritmo de Newton-Raphson.

El procedimiento numérico, en este caso, parte de linealizar la suma residual de una regresión intrínsecamente no lineal en torno a unos determinados valores de los parámetros β mediante un desarrollo en serie de Taylor de segundo orden:

$$SR(\beta) \cong M(\beta) = SR(\hat{\beta}^0) + \left[\nabla SR(\hat{\beta}^0)\right]'(\beta - \hat{\beta}^0) + \frac{1}{2}(\beta - \hat{\beta}^0)'\nabla^2 SR(\hat{\beta}^0)(\beta - \hat{\beta}^0) \tag{4.4}$$

donde $SR(\beta)$ representa la suma de los cuadrados de los residuos del modelo no lineal, $M(\beta)$ la aproximación lineal de dicha suma, $\hat{\beta}^0$ el valor inicial que toma el vector columna de parámetros β y $\nabla SR(\hat{\beta}^0)$ y $\nabla^2 SR(\hat{\beta}^0)$el vector gradiente y la matriz hessiana de la suma residual, respectivamente, evaluados en $\hat{\beta}^0$.

A continuación, derivamos la expresión (4.4) con respecto al vector de parámetros β e igualamos a cero:

$$\frac{\partial M(\beta)}{\partial \beta} = \nabla SR(\hat{\beta}^0) + \nabla^2 SR(\hat{\beta}^0)(\beta^* - \hat{\beta}^0) = 0$$

Ahora, despejamos β^*:

$$\beta^* = \hat{\beta}^1 = \hat{\beta}^0 - \nabla SR(\hat{\beta}^0)\left[\nabla^2 SR(\hat{\beta}^0)\right]^{-1} \quad \textbf{(4.5)}$$

donde $\hat{\beta}^1$ constituye la matriz $K \times 1$ de los nuevos valores de los estimadores MCO para la primera aproximación lineal de la regresión.

Genéricamente, para N linealizaciones, la ecuación (4.5) adopta la siguiente expresión, la cual constituye el denominado algoritmo de Newton-Raphson:

$$\hat{\beta}^N = \hat{\beta}^{N-1} - \nabla SR(\hat{\beta}^{N-1})\left[\nabla^2 SR(\hat{\beta}^{N-1})\right]^{-1}$$

Este algoritmo se utiliza iterativamente hasta alcanzar un valor para el vector de estimadores $\hat{\beta}$ que satisfaga los criterios de convergencia pertinentes. Si los valores iniciales de los coeficientes en torno a los cuales se linealiza la regresión están próximos a sus verdaderos valores, serán necesarias pocas iteraciones.

Tal y como puntualiza Novales (1993), la utilidad del algoritmo de Newton-Raphson está sujeta a las condiciones de existencia de las derivadas de la suma residual de la regresión, así como de la invertibilidad de la matriz hessiana.

Los estimaciones de los $K + 1$ parámetros obtenidas a partir de este algoritmo se corresponden con la de mínimos cuadrados ordinarios, para la última linealización de la regresión inicial, y con la de mínimos cuadrados no lineales del modelo intrínsecamente no lineal de partida.

4.1.2. Propiedades del estimador de mínimos cuadrados no lineales.

La ruptura con la hipótesis de linealidad en los modelos intrínsecamente no lineales hace que el estimador MCNL (mínimos cuadrados no lineales) pierda cualidades con respecto al estimador MCO. De forma generalizada, y tal y como vimos con el modelo (*4.1*), el estimador de mínimos cuadrados no lineales no es función lineal de la variable endógena y, por lo tanto, tampoco depende linealmente de la perturbación aleatoria. Este hecho tiene dos importantes implicaciones sobre sus propiedades:

- El estimador no es, generalmente, insesgado (Novales, A., 1993). Si el estimador no es insesgado, tampoco puede ser eficiente u óptimo.
- El estimador no sigue una distribución normal, ya que se rompe con la premisa: “Todo lo que depende linealmente de una variable aleatoria que sigue una distribución normal también sigue una distribución normal.”

¿Qué propiedades tiene el estimador de mínimos cuadrados no lineales, entonces? Suponiendo que se cumplen las hipótesis clásicas –exceptuando la linealidad-, podemos afirmar que el estimador MCNL es consistente. La consistencia viene garantizada por la ortogonalidad entre los regresores y la perturbación aleatoria, la cual se cumple incluso cuando existe exogeneidad estricta o contemporánea, y por el hecho de que la matriz $\frac{X'X}{T}$ converge en probabilidad a una matriz singular y definida positiva, distinta de cero.

Si a las hipótesis clásicas le sumamos la premisa de que la varianza de la perturbación aleatoria no depende de los parámetros β, podemos concluir que el estimador de mínimos cuadrados no lineales y el estimador máximo verosímil coinciden. Por lo tanto, bajo estas condiciones, el estimador MCNL heredaría las propiedades asintóticas del estimador MV: invarianza, consistencia, insesgadez asintótica, eficiencia asintótica y distribución asintótica normal: $\hat{\beta}_{MCNL} \overset{a}{\to} N\left[\beta, \sigma_U^2\left(\left(\nabla^2 SR\left(\hat{\beta}_{MCNL}{}^{N}\right)\right)^{-1}\right)\right]$.

Por otra parte, teniendo en consideración que los estadísticos t y F se basan en conceptos estadísticos y en premisas econométricas acerca de las distribuciones de la perturbación aleatoria y del estimador, para un modelo estimado mediante MCNL -los cuales son asintóticamente normales bajo las suposiciones mencionadas anteriormente-, dichos estadísticos resultan válidos a medida que aumenta el tamaño muestral.

En cuanto al coeficiente de determinación, R^2, éste puede aplicarse de manera convencional a una regresión intrínsecamente no lineal (Pindyck, R. S.; Rubenfield, D. L., 2000).

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS.

El análisis de resultados de este trabajo consiste en la estimación y correspondiente estudio econométrico, a través de Eviews, de la función de producción Cobb-Douglas en España para el periodo 1980-2014.

El modelo econométrico objetivo de nuestro análisis es el siguiente:

$$Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{\beta} e^{U_t} \qquad \textbf{(5.1)}$$

donde Y es el PIB a precios de mercado constantes de 2010 expresado en miles de millones de €, K el capital a precios constantes de 2010 expresado en miles de millones de € y L el empleo expresado en miles de personas. A, α y β son los parámetros a estimar.

Para este caso práctico, hemos trabajado con dos bases de datos. En primer lugar, las cifras relativas al PIB se han obtenido de la base de datos ‘World Economic Outlook’ de abril de 2015, correspondiente al FMI. Por su parte, los datos del empleo y del capital han sido extraídos de ‘AMECO’, la base de datos de la Comisión Europea, actualizada, por última vez, el 5 de mayo de 2015.

El modelo (5.1), como ya explicamos en la parte teórica del presente trabajo, es una regresión intrínsecamente lineal, por lo que podemos aplicar logaritmos neperianos y trabajar con su especificación lineal:

$$lnY_t = lnA + \alpha lnK_t + \beta lnL_t + U_t \qquad \textbf{(5.2)}$$

Tal y como recoge la TABLA A.1[5], el modelo (5.2) estimado es el siguiente:

---

[5] Para ver las tablas y gráficos, consultar Anexo.

$$\widehat{lnY_t} = -2,6081 + 0,4982 lnK_t + 0,5586 lnL_t$$
$$(4,4453) \quad (9,4616) \quad (5,6041)$$

$$\bar{R}^2 = 0,9861; AKI = -3,8376; SW = -3,7043;\ p(F) = 0;\ d = 0,0735$$

donde los números entre paréntesis se refieren al valor absoluto de los estadísticos t de los estimadores de los parámetros, AKI y SW son los estadísticos de Akaike y Schwarz, respectivamente, los cuales no interpretamos pero sí utilizaremos para comparar la bondad de ajuste del modelo, $p(F)$ es el p-valor del estadístico F en el contraste de significación de la regresión y d el estadístico de Durbin- Watson para autocorrelación.

La estimación del término independiente de la especificación (5.2) no se corresponde con el valor estimado del parámetro tecnológico A del modelo (5.1), ya que éste está afectado por logaritmos. El verdadero valor del estimador del coeficiente A es:

$$\widehat{lnA} = -2,6081 \rightarrow \hat{A} = e^{-2,6081} = 0,0736$$

El parámetro tecnológico toma un valor positivo, lo cual es coherente con la Teoría Económica. Así mismo, las estimaciones de los parámetros α y β , que se interpretan como elasticidades, son positivas, lo que es consistente con las propiedades teóricas de la función Cobb-Douglas.

El coeficiente de determinación ajustado, R^2, comprendido entre 0 y 1, es elevado, un $0,9869$. El $98,69\%$ del PIB viene explicado por el capital y el empleo, por lo que podemos pensar que es una buena regresión. No obstante, el estadístico de Durbin sugiere para el modelo autocorrelación positiva, por lo que los estadísticos t y F no son válidos para los contrastes de hipótesis.

Contraste de normalidad de Jarque-Bera.

$$\left.\begin{array}{r} H_0: normalidad \\ H_1: ausencia\ de\ normalidad \end{array}\right\} \mathrm{J-B} \overset{a}{\rightarrow} \mathcal{X}_2^2$$

En el GRÁFICO A.1, obtenemos que el valor del estadístico de Jarque-Bera es $2,843$, menor que el valor crítico $\mathcal{X}_2^2$, por lo que no rechazamos la hipótesis nula y concluimos que la perturbación del modelo (5.2) sigue una distribución normal.

Análisis de cambio estructural.

En primer lugar, recurrimos al método gráfico, a través del cual analizamos la estabilidad de los coeficientes y los residuos del modelo (5.2).

En el GRÁFICO A.2 observamos el comportamiento de los tres parámetros –de arriba a abajo: lnA, α y β- a lo largo de la serie temporal. Como podemos comprobar, ninguno de los coeficientes permanece estable en el tiempo, sino que existen fluctuaciones más o menos significativas. Los cambios de comportamiento del parámetro lnA tienen lugar en 1992 y 2008, los de α en 1993 y 2008 y, por último, los de β en 1991 y 2009.

El GRÁFICO A.3 muestra la evolución de los residuos de la regresión, representada por la línea azul. Tal y como vemos, la línea azul sale de las bandas de fluctuación rojas entre 2008 y 2011, registrando un considerable descenso en 2009. Además, se observa una importante caída, aunque no tan significativa como la anterior, en el año 1993.

El análisis gráfico nos lleva a pensar que, en efecto, hay cambio estructural y en dos momentos diferentes: a principios de la década de los 90 –en torno a 1991, 1992 y 1993- y a finales de la primera década del siglo XXI –alrededor de 2008 y 2009-. La lógica económica refuerza esta hipótesis, ya que los cambios estructurales están asociados a las dos últimas crisis económicas vividas en nuestro país.

A continuación realizamos el denominado test de Chow, el cual nos permite contrastar si los parámetros de la regresión (5.2) mantienen el mismo valor a lo largo de la serie temporal o, por el contrario, lo modifican.

Creemos que la serie 1980-2014 se divide en tres periodos[6] y, por lo tanto, el modelo (5.2) adopta una especificación distinta para cada uno de ellos:

Primer periodo –de 1980 a 1990-:

$$lnY_t{}^1 = lnA^1 + \alpha^1 lnK_t + \beta^1 lnL_t + U_t{}^1$$

Segundo periodo –de 1990 a 2007-:

[6] Hemos escogido estos dos años ya que, a pesar de que dudábamos entre varias fechas cercanas a ellas, eran éstas para las cuales se aceptaba, con mayor rotundidad la hipótesis de cambio estructural o inestabilidad de los coeficientes

$$lnY_t{}^2 = lnA^2 + \alpha^2 lnK_t + \beta^2 lnL_t + U_t{}^2$$

Tercer periodo –de 2008 a 2014-:

$$lnY_t{}^3 = lnA^3 + \alpha^3 lnK_t + \beta^3 lnL_t + U_t{}^3$$

El test de Chow es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \begin{pmatrix} lnA^1 \\ \alpha^1 \\ \beta^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lnA^2 \\ \alpha^2 \\ \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lnA^3 \\ \alpha^3 \\ \beta^3 \end{pmatrix} \\ H_1\colon \begin{pmatrix} lnA^1 \\ \alpha^1 \\ \beta^1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} lnA^2 \\ \alpha^2 \\ \beta^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} lnA^3 \\ \alpha^3 \\ \beta^3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} F_{26}^{6}$$

Para todos los pares de fechas planteados anteriormente rechazamos la hipótesis nula ya que ,tal y como, aparece en la TABLA A.2, el estadístico F toma un valor $29{,}3048$, muy superior al valor crítico F_{26}^{6}.

El modelo (5.2) presenta un cambio estructural en 1991 y 2008 y, por lo tanto, éste ha de ser especificado de algún modo. La introducción de variables ficticias en la regresión es una buena solución al problema. Si no las incluyéramos estaríamos cometiendo un error por omisión de variables relevantes –las ficticias-, con lo que los estimadores MCO serían sesgados e inconsistentes.

Construimos, entonces, dos variables ficticias que permitan distinguir los tres periodos dentro de la serie temporal 1980-2014:

$$D1_t = \begin{cases} 0 - de\ 1980\ a\ 1990 - \\ 1 - de\ 1991\ a\ 2014 - \end{cases} \qquad D2_t = \begin{cases} 0 - de\ 1980\ a\ 2007 - \\ 1 - de\ 2008\ a\ 2014 - \end{cases}$$

Planteamos, por lo tanto, una nueva regresión incluyendo las variables $D1$ y $D2$ de manera aditiva y multiplicativa:

$$\begin{aligned} lnY_t = {} & lnA + \alpha lnK_t + \beta lnL_t + \mathrm{a}_1 D1_t + \mathrm{a}_2 D1_t lnK_t + \mathrm{a}_3 D1_t lnL_t \\ & + \mathrm{a}_4 D2_t + \mathrm{a}_5 D2_t lnK_t + \mathrm{a}_6 D2_t lnL_t + U_t \end{aligned} \qquad \textbf{(5.3)}$$

La estimación del modelo (5.3) se recoge en la TABLA A.3:

$$\begin{array}{lccccc} \widehat{lnY_t} = & -4{,}4949 & +0{,}9308 lnK_t & +0{,}4217 lnL_t & +2{,}7978 D1_t & +0{,}3620 D1_t lnK_t \\ & (5{,}6272) & (13{,}3742) & (3{,}5890) & (3{,}0912) & (3{,}3127) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} -0{,}0115 D1_t lnL_t & -1{,}2429 D2_t & -0{,}0778 D2_t lnK_t & +0{,}1849 D2_t lnL_t \\ (0{,}0723) & (0{,}1060) & (0{,}0801) & (0{,}4604) \end{array}$$

$$\bar{R}^2 = 0{,}997802; AKI = -5{,}5441; SW = -5{,}1452; p(F) = 0$$

Tal y como podemos comprobar observando el estadístico $\bar{R}^2$ el ajuste de la regresión (5.3) mejora con respecto al del modelo (5.2). Así mismo, los estadísticos Akaike y Schwarz también reflejan una mejora –son menores que en la especificación anterior-..

Es probable que, aunque las variables ficticias sean necesarias para recoger el cambio estructural, éstas no afecten a todos los coeficientes del modelo, sino sólo a algunos. Es por ello que debemos hacer una selección de variables.

En primer lugar, eliminamos, mediante ejercicio de ensayo y error, eliminamos $D1lnL$ de la regresión (5.3). Obtenemos el siguiente modelo:

$$\begin{gathered} lnY_t = lnA + \alpha lnK_t + \beta lnL_t + a_1 D1_t + a_2 1_t lnK_t + a_4 D2_t \\ + a_5 D2_t lnK_t + a_6 D2_t lnL_t + U_t \end{gathered} \quad \textbf{(5.4)}$$

Su estimación aparece en la TABLA A.4:

$$\begin{gathered} \widehat{lnY_t} = \underset{(7{,}6428)}{-4{,}4563} + \underset{(16{,}4316)}{0{,}9336} lnK_t + \underset{(5{,}3214)}{0{,}4155} lnL_t + \underset{(6{,}2870)}{2{,}7394} D1_t - \underset{(6{,}8437)}{0{,}3688} D1_t lnK_t \\ - \underset{(0{,}1063)}{1{,}2231} D2_t - \underset{(0{,}0775)}{0{,}0737} D2_t lnK_t + \underset{(0{,}4634)}{0{,}1796} D2_t lnL_t \end{gathered}$$

$$\bar{R}^2 = 0{,}997883; AKI = -5{,}6010; SW = -5{,}2455; p(F) = 0$$

Los estadísticos de bondad de ajuste $\bar{R}^2$, Akaike y Schwarz mejoran en el modelo (5.4) con respecto al anterior.

Intuimos que existen variables ficticias redundantes en el modelo (*5.4*), con lo que volvemos a repetir procedimiento, eliminando ahora $D2lnK$. La nueva regresión queda especificada de la siguiente forma:

$$\begin{gathered} lnY_t = lnA + \alpha lnK_t + \beta lnL_t + \mathrm{a}_1 D1_t + \mathrm{a}_2 D1_t lnK_t + \mathrm{a}_4 D2_t \\ + \mathrm{a}_6 D2_t lnL_t + U_t \end{gathered} \quad \textbf{(5.5)}$$

Su estimación aparece reflejada en la TABLA A.5:

$$\begin{gathered} \widehat{lnY_t} = \underset{(7{,}7967)}{-4{,}4586} + \underset{(16{,}7406)}{0{,}9334} lnK_t + \underset{(5{,}4341)}{0{,}4158} lnL_t + \underset{(6{,}9586)}{2{,}7405} D1_t - \underset{(6{,}9753)}{0{,}3689} D1_t lnK_t \\ - \underset{(1{,}6026)}{2{,}1089} D2_t + \underset{(1{,}5696)}{0{,}2078} D2_t lnL_t \end{gathered}$$

$$\bar{R}^2 = 0{,}997959; AKI = -5{,}6580; SW = -5{,}3469; p(F) = 0$$

El ajuste de la regresión (5.5) mejora con respecto al modelo (5.4). El coeficiente de determinación ajustado es mayor y los estadísticos Akaike y Schwarz también se hacen más pequeños –mejoran-. A pesar de ello probamos a prescindir de $D2lnL$.

Eliminando $D2lnL$ de la regresión (5.5), obtenemos el siguiente modelo,

$$lnY_t = lnA + \alpha lnK_t + \beta lnL_t + \mathrm{a}_1 D1_t + \mathrm{a}_2 D1_t lnK_t + \mathrm{a}_4 D2_t + U_t \qquad \textbf{(5.6)}$$

, cuya estimación aparece en la TABLA A.6:

$$\underset{}{\widehat{lnY_t}} = \underset{(10,8940)}{-5,0143} + \underset{(17,5964)}{0,8932 lnK_t} + \underset{(9,7387)}{0,5058 lnL_t} + \underset{(7,9197)}{2,9694 D1_t} - \underset{(7,8750)}{0,3938 D1_t lnK_t}$$

$$\underset{(3,5193)}{-0,0435 D2_t}$$

$$\bar{R}^2 = 0,9978; AKI = -5,6308; SW = -5,3641; p(F) = 0$$

Como podemos comprobar, los estadísticos $\bar{R}^2$ y Akaike reflejan un peor ajuste del modelo (5.6) en comparación con la regresión (5.5). Esto nos lleva a pensar que, al prescindir de $D2lnL$, estamos cometiendo un error por omisión de variable relevante, con lo que los estimadores del modelo (5.6) serían sesgados e inconsistentes.

Optamos, por lo tanto, por quedarnos con el modelo (5.5), que adopta tres especificaciones, una para cada periodo descrito anteriormente:

De 1980 a 1990 ($D1_t = 0; D2_t = 0$):

$$lnY_t = lnA + \alpha lnK_t + \beta lnL_t + U_t$$

De 1991 a 2007 ($D1_t = 1; D2_t = 0$):

$$lnY_t = (lnA + \mathrm{a}_1) + (\alpha + \mathrm{a}_2) lnK_t + \beta lnL_t + U_t$$

De 2008 a 2014 ($D1_t = 1; D2_t = 1$):

$$lnY_t = (lnA + \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_4) + (\alpha + \mathrm{a}_2) lnK_t + (\beta + \mathrm{a}_6) lnL_t + U_t$$

Los coeficientes que acompañan a las variables ficticias aditivas, a_1 y a_4, se refieren a la diferencia en el factor tecnológico dependiendo del periodo de tiempo por el que atraviesa la economía. El parámetro a_2 se interpreta como la diferencia, en puntos porcentuales, que experimenta la elasticidad del PIB con respecto al insumo capital entre los dos últimos periodos (1991-2014) y el primero (1980-1990). Análogamente, el coeficiente a_6 hace referencia a la diferencia, en puntos porcentuales, en la elasticidad del PIB frente al factor trabajo entre el último periodo (2008-2014) y los dos anteriores (1980-2007).

Análisis de multicolinealidad.

Para detectar la posible presencia de multicolinealidad, nos fijamos en dos aspectos fundamentales de los regresores del modelo (5.5): sus coeficientes de correlación múltiple y el tamaño de las varianzas de sus estimadores.

Estudiamos los coeficientes de correlación múltiple de las variables explicativas del modelo, definidos como los coeficientes de determinación de cada uno de los regresores del modelo frente al resto:

Variable	Coeficiente de correlación múltiple
lnK	$R^2_{lnK \bullet lnL,D1,D1lnK,D2,D2lnL} = 0{,}9879$
lnL	$R^2_{lnL \bullet lnK,D1,D1lnK,D2,D2lnL} = 0{,}9277$
$D1$	$R^2_{D1 \bullet lnK,lnL,D1lnK,D2,D2lnL} = 0{,}9994$
$D1lnK$	$R^2_{D1lnK \bullet lnK,lnL,D1,D2,D2lnL} = 0{,}9999$
$D2$	$R^2_{D2 \bullet lnK,lnL,D1,D1lnK,D2lnL} = 0{,}9999$
$D2lnL$	$R^2_{D2lnL \bullet lnK,lnL,D1,D1lnK,D2} = 0{,}9999$

Observando los valores obtenidos, concluimos que la variables explicativas del modelo se encuentran altamente correlacionadas entre sí.

Por último, establecemos una medida relativa del tamaño de la varianza de los estimadores: el denominado factor de inflación de la varianza. Se trata de un indicador que refleja cuánto aumenta la varianza de un estimador con respecto al caso en el que no existiera ningún tipo de correlación entre regresores. Su expresión genérica es la siguiente:

$$FIV_{\hat{\beta}} = \frac{1}{1 - coeficiente\ de\ correlación\ múltiple}$$

Como vemos en el siguiente cuadro, las varianzas de los estimadores del modelo (5.5) se incrementan notablemente con respecto a la situación de absoluta incorrelación u ortogonalidad entre regresores:

Estimador	Factor inflación varianzas
$\hat{\alpha}$	82,6446
$\hat{\beta}$	13,8312
$\widehat{a_1}$	1666,7
$\widehat{a_2}$	2000
$\widehat{a_4}$	10000
$\widehat{a_6}$	10000

Podemos concluir que el modelo (5.5) presenta signos evidentes de multicolinealidad imperfecta o fuerte entre sus regresores. No obstante, resulta lógico pensar que exista tan estrecha relación entre variables explicativas, ya que, al fin y al cabo, éstas se repiten al incluir variables ficticias. Como bien demostramos en el análisis de cambio estructural, la bondad de ajuste de la regresión mejora cuando incluimos variables ficticias, por lo que es conveniente mantenerlas.

Análisis de heteroscedasticidad.

El método más recurrente para detectar heteroscedasticidad es el contraste de White, el cual se basa en una regresión auxiliar en la que planteamos el cuadrado del residuo del modelo (5.5) frente a las variables explicativas y al cuadrado y el producto de los regresores de dicho modelo.

El test es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} H_0: homoscedasticidad \\ H_1: heteroscedasticidad \end{array}\right\} W = T \times R^2_{aux} \xrightarrow{a} \mathcal{X}^2_H$$

donde H es el número de variables explicativas de la regresión auxiliar.

Tal y como se recoge en la TABLA A.7, Eviews plantea esta regresión auxiliar:

$$e_t^2 = \mathrm{b}_0 + \mathrm{b}_1 lnK_t + \mathrm{b}_2 lnK_t^2 + \mathrm{b}_3 lnK_t lnL_t + \mathrm{b}_4 D1_t lnK_t + \mathrm{b}_5 lnK_t(D1_t lnK_t)$$
$$+\mathrm{b}_6 D2_t lnK_t + \mathrm{b}_7 lnK_t(D2_t lnL_t) + \mathrm{b}_8 lnL_t + \mathrm{b}_9 D1_t lnL_t$$
$$+\mathrm{b}_{10} D2_t lnL_t + \mathrm{b}_{11} lnL_t(D2_t lnL_t) + \mathrm{b}_{12} D1_t + U_t$$

Para un valor crítico $\mathcal{X}^2_{12} = 21$, no rechazamos la hipótesis nula, puesto que el estadístico de White obtenido, $W = T \times R^2_{aux}$, es 17,3058. Concluimos, por tanto, que la regresión (5.5) no presenta heteroscedasticidad, es decir, la varianza de su perturbación es constante a lo largo del tiempo. Podemos confirmar que, por el momento, nos encontraríamos ante un modelo de regresión lineal clásico en el que los estimadores MCO cumplen todas las propiedades deseables, siempre que se cumplan las demás hipótesis clásicas.

Análisis de autocorrelación.

Para el estudio de autocorrelación del modelo (5.5) nos ayudamos del método gráfico –correlogramas- y de los contrastes de Durbin-Watson y Breusch-Godfrey.

Los correlogramas del modelo (5.5) aparecen recogidos en el GRÁFICO A.4. Observamos que existen barras que rebosan las bandas de fluctuación, por lo que sospechamos que existe autocorrelación. Parece que es la FASE – función de autocorrelación estimada- la que tiende a cero, por lo que la perturbación podría seguir un esquema AR. El comportamiento de la función de autocorrelación parcial estimada (FAPE), en la que sale la primera barra, sugiere que el esquema es de orden 1.

A continuación, planteamos el test Durbin-Watson, el cual nos permite contrastar si la perturbación sigue un esquema $AR(1)$:

$$U_t = \rho U_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es ruido blanco.

$$\left.\begin{array}{c} H_0\colon \rho = 0 \\ H_1\colon \rho > 0 \text{ ó } \rho < 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} d_U = 1{,}884 \\ d_L = 1{,}097 \end{array}$$

El estadístico de Durbin- Watson obtenido en la TABLA A.5 es $0{,}6773$, por lo que cae en la región de autocorrelación positiva. La perturbación del modelo sigue un esquema $AR(1)$.

Por último, recurrimos al contraste de Breusch-Godfrey, que plantea la siguiente regresión auxiliar para un retardo del residuo del modelo (5.5):

$$e_t = \rho_1 e_{t-1} + lnA + \alpha lnK_t + \beta lnL_t + \mathrm{a}_1 D1_t + \mathrm{a}_2 D1_t lnK_t + \mathrm{a}_4 D2_t$$
$$+\mathrm{a}_6 D2_t lnL_t + U_t$$

$$\left.\begin{array}{c} H_0\colon \rho_1 = 0 \\ H_1\colon AR(1) \text{ó } MA(1) \end{array}\right\} B - G = T \times R^2_{aux} \overset{\mathrm{a}}{\rightarrow} \mathcal{X}^2_1$$

En la TABLA A.8, obtenemos $B-G=T\times R^2_{aux}\ =17{,}1075$, una cantidad mucho mayor que el valor crítico $\mathcal{X}^2_1$. Es por ello que rechazamos la hipótesis nula, por lo que la perturbación de la regresión (5.5) puede seguir un esquema $AR(1)$ ó $MA(1)$.

Ahora, vamos a contrastar si la perturbación sigue un esquema autorregresivo o de medias móviles de orden dos. Para ello, planteamos una nueva regresión auxiliar en la que introducimos dos retardos de los residuos:

$$e_t=\rho_1e_{t-1}+\rho_2e_{t-2}+lnA+\alpha lnK_t+\beta lnL_t+\mathrm{a}_1D1_t+\mathrm{a}_2D1_tlnK_t+\mathrm{a}_4D2_t$$
$$+\mathrm{a}_6D2_tlnL_t+U_t$$

Considerando que ya hemos detectado que la perturbación está correlacionada con la del periodo anterior, esta vez no vamos a calcular la significación conjunta de los retardos de los residuos -ya que es muy probable que rechacemos la hipótesis nula- sino que vamos a contrastar la significación individual del segundo retardo:

$$\left.\begin{matrix}H_0\colon\rho_2\ =0\\ H_1\colon\rho_2\ \neq 0\end{matrix}\right\}t_{26}$$

Tal y como aparece en la TABLA A.9, el estadístico t obtenido es $-0{,}0295$, por lo que no rechazamos la hipótesis nula. El segundo retardo del residuo no es significativo y, por lo tanto, la perturbación no sigue un esquema $AR(2)$ ó $MA(2)$.

Tanto el análisis de correlogramas como los contrastes, nos permiten afirmar que la perturbación de la regresión (5.5) presenta autocorrelación según un esquema $AR(1)$. Nos encontramos, por lo tanto, ante un modelo de regresión lineal generalizado, en el que los estimadores MCO pierden propiedades y los estadísticos t y F no resultan fiables.

Podemos tratar de solucionar el problema de autocorrelación del modelo (5.5) planteando el modelo de diferencias generalizadas:

$$lnY_t-\hat{\rho}lnY_{t-1}=(1-\hat{\rho})lnA+\alpha(lnK_t-\hat{\rho}lnK_{t-1})+\beta(lnL_t-\hat{\rho}lnL_{t-1})$$
$$+\mathrm{a}_1(D1_t-\hat{\rho}D1_{t-1})+\mathrm{a}_2(D1_tlnK_t-\hat{\rho}D1_{t-1}lnK_{t-1})+\mathrm{a}_4(D2_t-\hat{\rho}D2_{t-1}) \qquad \textbf{(5.7)}$$
$$+\mathrm{a}_6(D2_tlnL_t-\hat{\rho}D2_{t-1}lnL_{t-1})+(U_t-\hat{\rho}U_{t-1})$$

En la TABLA A.10 aparece recogida la estimación del modelo (5.7):

$$\widehat{lnL_t} = \underset{(0{,}7923)}{0{,}8948} \underset{(0{,}8236)}{-0{,}1546lnK_t} \underset{(9{,}65)}{+0{,}7708lnL_t} \underset{(0{,}4750)}{-0{,}4581D1_t} \underset{(0{,}4747)}{+0{,}0611D1lnK_t} \underset{(0{,}4146)}{+0{,}5743D2_t}$$

$$\underset{(0{,}4140)}{-0{,}0574D2lnL_t}, \quad \hat{\rho} = \underset{(72{,}5047)}{0{,}9662}$$

$$AKI = -7{,}1728; SW = -6{,}8137; p(F) = 0$$

Los estadísticos Akaike y Schwarz indican una notable mejora del ajuste de la regresión (5.7) con respecto al modelo (5.5). No obstante, encontramos graves incoherencias entre la significación de la regresión y las significaciones individuales de las variables explicativas. Además, debemos contrastar, a través de Breusch-Godfrey, si sigue existiendo autocorrelación en el nuevo modelo.

En primer lugar, planteamos el contraste de Breusch-Godfrey sobre una regresión auxiliar en la que se incluye un retardo del residuo del modelo (5.7):

$$e_t = \rho_1 e_{t-1} + a + \alpha k_t + \beta l_t + \mathrm{a}_1 d1_t + \mathrm{a}_2 d1k_t + \mathrm{a}_4 d2_t + \mathrm{a}_6 d2l_t + \varepsilon_t$$

$$\left.\begin{array}{c} H_0: \rho_1 = 0 \\ H_1: AR(1) \text{ó } MA(1) \end{array}\right\} B - G = T \overset{a}{\rightarrow} \mathcal{X}_1^2$$

Obtenemos, en la TABLA A.11 que el estadístico $B - G$ toma un valor $1{,}3259$, cifra menor que el valor crítico $\mathcal{X}_1^2$, por lo que no rechazamos la hipótesis nula. La perturbación no está correlacionada con la del periodo anterior y, en consecuencia, no sigue un esquema $AR(1)$ ni $MA(1)$.

A continuación, para dos retardos, planteamos el contraste para la siguiente regresión auxiliar:

$$e_t = \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + a + \alpha k_t + \beta l_t + \mathrm{a}_1 d1_t + \mathrm{a}_2 d1k_t + \mathrm{a}_4 d2_t + \mathrm{a}_6 d2l_t + \varepsilon_t$$

$$\left.\begin{array}{c} H_0: \rho_1 = \rho_2 = 0 \\ H_1: AR(2) \text{ó } MA(2) \end{array}\right\} B - G = T \overset{a}{\rightarrow} \mathcal{X}_2^2$$

Tal y como recoge la TABLA A.12, el estadístico $B - G$ toma un valor $7{,}2355$, con lo que rechazamos la hipótesis nula. La perturbación sigue un esquema $AR(2)$ ó $MA(2)$.

El modelo transformado factible (5.7) no es bueno, ya que la perturbación sigue presentando autocorrelación según un esquema $AR(2)$ ó $MA(2)$ y, por lo tanto, la estimación MCO no es válida. Es por ello, y por las incoherencias antes detectadas, que descartamos la regresión (5.7).

Conclusión.

Como hemos visto, el modelo (5.5) presenta un grave problema de autocorrelación, aunque, en un primer análisis se haya detectado, únicamente, que la perturbación sigue un esquema $AR(1)$. Existen varias soluciones al problema aunque, debido al carácter meramente ilustrativo de este análisis y a la extensión limitada del presente trabajo, optamos por estimar los parámetros del modelo (5.5) mediante MCO con estimadores consistentes de Newey-West de sus varianzas. En este caso, los estimadores MCO son únicamente lineales, insesgados y consistentes –a excepción del estimador del término independiente, que cumple únicamente las hipótesis asintóticas, como bien hemos explicado anteriormente- , pero las varianzas de sus estimadores son consistentes y los estadísticos t y F asintóticamente válidos.

La nueva estimación aparece en la TABLA A.13 y es la siguiente:

$$\widehat{lnY_t} = \underset{(9{,}7863)}{-4{,}4586} \underset{(20{,}5687)}{+0{,}9334} lnK_t \underset{(7{,}5826)}{+0{,}4158} lnL_t \underset{(6{,}9415)}{+2{,}7405} D1_t \underset{(7{,}0126)}{-0{,}3689} D1_t lnK_t$$
$$\underset{(2{,}9066)}{-2{,}1089} D2_t \underset{(2{,}8427)}{+0{,}2078} D2_t lnL_t$$

$$\bar{R}^2 = 0{,}9979; AKI = -5{,}6580; SW = -5{,}3469; p(F) = 0$$

Para cada uno de los periodos:

De 1980 a 1990 ($D1_t = 0; D2_t = 0$):

$$\widehat{lnY_t} = -4{,}4586 + 0{,}9334 lnK_t + 0{,}4158 lnL_t$$

$$\widehat{lnA} = -4{,}4586 \rightarrow \hat{A} = e^{-4{,}4586} = 0{,}0115$$

De 1991 a 2007 ($D1_t = 1; D2_t = 0$):

$$\widehat{lnY_t} = -1{,}7181 + 0{,}5645 lnK_t + 0{,}4158 lnL_t$$

$$\widehat{lnA} = -1{,}7181 \rightarrow \hat{A} = e^{-1{,}7181} = 0{,}1794$$

De 2008 a 2014 ($D1_t = 1; D2_t = 1$):

$$\widehat{lnY_t} = -3{,}827 + 0{,}5645 lnK_t + 0{,}6236 lnL_t$$

$$\widehat{lnA} = -3{,}827 \rightarrow \hat{A} = e^{-3{,}827} = 0{,}0217$$

Tal y como observamos, los parámetros de las variables lnK y lnL son positivos y cercanos a la unidad, lo que es perfectamente compatible con la Teoría Económica. También, los valores de $\hat{A}$ son positivos y coherentes con las propiedades teóricas de la función de producción Cobb-Douglas para todos los periodos.

La regresión es significativa, tal y como indica el p-valor de F. Cabe destacar que, ahora, en la nueva y definitiva estimación del modelo (5.5), todas las variables son significativas individualmente para $t_{28} = 2{,}048$, incluidas las dos últimas que en la TABLA A.5 aparecían como no significativas.

Como podemos comprobar, la elasticidad PIB/insumo capital es sensible a los dos últimos periodos económicos propuestos –de 1991 a 2014-. Vemos que el que existe una diferencia negativa de aproximadamente $0{,}4$ puntos porcentuales entre el primer periodo y los dos últimos. Por su parte, la elasticidad PIB/factor trabajo es sensible al último periodo –de 2008 a 2014-. Dicha elasticidad se incrementa en torno a $0{,}2$ puntos porcentuales con respecto a los dos periodos anteriores. Por su parte, el factor tecnológico tiene una mayor representatividad en el periodo 1991/2007.

6. CONCLUSIONES.

El presente trabajo ha pretendido ofrecer una visión, más o menos, amplia acerca de las diversas formas funcionales que pueden adoptar los modelos de regresión, destacando la importancia de los modelos no lineales, tan presentes en la Economía. Así mismo, se ha hecho necesario el estudio de las implicaciones que estas especificaciones no lineales tienen para su estimación y análisis inferencial.

Como hemos visto, entre los modelos de regresión no lineales, hay aquellos que pueden ser linealizados de manera sencilla aplicando las siempre recurrentes transformaciones logarítmicas –los denominados modelos intrínsecamente lineales-, mientras que otros no pueden linealizarse mediante simples transformaciones –hablamos de los modelos intrínsecamente no lineales-.

El criterio de estimación propuesto que todos los modelos de regresión descritos anteriormente siguen es el de minimización de su suma residual. No obstante, mientras que las regresiones intrínsecamente lineales, bajo cumplimiento de las hipótesis clásicas, pueden estimarse directamente mediante mínimos cuadrados ordinarios, los modelos no lineales en sentido estricto requieren técnicas de estimación más sofisticadas y laboriosas que utilizan algoritmos matemáticos para su resolución.

Cabe destacar, tal y como se ha analizado en este trabajo, que la no linealidad en los modelos econométricos implica cambios en la interpretación de los parámetros con respecto a las regresiones lineales. Además, como consecuencia de dicha no linealidad y de las transformaciones de que son objeto los modelos, los estimadores mínimo cuadráticos pueden ver afectadas sus propiedades.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Alonso, C. (s.f.). *Econometría. El modelo de regresión lineal múltiple.* Recuperado el 13 de junio de 2015, de Universidad Carlos III de Madrid: http://www.eco.uc3m.es/econometria/NotasdeClase/Tema3.pdf

Chica Olmo, J. (2014). *Elaboración de un modelo econométrico.* Recuperado el 4 de julio de 2015, de Proyecto de Innovación Guime 2.0. Universidad de Granada.: http://www.ugr.es/~jchica/Pagina2/Modelo/Modelo.htm

Cortés López, J. C.; Romero Bauset , J. V.; Roselló Ferragut, M. D. (s.f.). *El rol de las funciones polinómicas cúbicas para representar adecuadamente los costes totales en Economía.* Recuperado el 7 de junio de 2015, de Facultad de Administración y Dirección de Empresas. Universidad Politécnica de Valencia: https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/12866/V1-El%20rol%20de%20las%20funciones%20de%20coste%20cubicas%20en%20Economia.pdf?sequence=1.

Gallego Gómez, J. L. (2008). *Apuntes de Econometría.Tema 5. Errores de especificación.* Recuperado el 5 de julio de 2015, de Universidad de Cantabria.

Departamento de Economía: http://ocw.unican.es/ciencias-sociales-y-juridicas/econometria/material-de-clase

Greene, W. H. (2000). *Econometric analysis.* Nueva York: Prentice Hall.

Gujarati, D. N.; Porter, D. C. (2010). *Econometría.* México: McGraw Hill.

Intriligator, M. D.; Bodkin, R. G.; Hisiao, C. (1996). *Econometric models, techniques and applications.* Upper Saddle River (Nueva Jersey): Prentice Hall.

Kizys, R.; López, A. (s.f.). *Análisis de especificación.* Recuperado el 4 de julio de 2015, de Universidad Oberta de Catalunya: http://www.uoc.edu/in3/emath/docs/T05_Analisis_Especificacion.pdf

Lazzari, L. L.; Parma, Andrea. (s.f.). *La función de producción ESC.* Recuperado el 30 de junio de 2015, de Facultad de Ciencias Económicas. Universidad de Buenos Aires: http://www.econ.uba.ar/www/departamentos/matematica/plan97/analisisii/lazzari/material/funcion_de_produccion_esc.pdf

Mauricio Oviedo, J. (s.f.). *Modelos no lineales: Gauss-Newton y Newton-Raphson. Implementaciones en Maple, Mathematica, Gauss, Matlab y Excel.* Recuperado el 26 de junio de 2015, de Instituto de Economía y Finanzas. Universidad de Córdoba: http://blogs.eco.unc.edu.ar/jorgeoviedo/trabajos/no-publicadosunpublished/

Novales, A. (1993). *Econometría.* Madrid: McGraw Hill.

Novales, A. (2013). *Estimación de modelos no lineales.* Recuperado el 22 de julio de 2015, de Departamento de Economía Cuantitativa. Universidad Complutense de Madrid: https://www.ucm.es/data/cont/media/www/pag-41459/Modelos%20no%20lineales%20corto.pdf

Pindyck, R. S.; Rubenfield, D. L. (2000). *Econometría:modelos y pronósticos.* México: McGraw Hill.

Pulido San Román, A.; Pérez García, J. (2001). *Modelos econométricos.* Madrid: Pirámide.

Salmerón, R. (s.f.). *Modelos no lineales.* Recuperado el 7 de julio de 2015, de Universidad de Granada: http://www.ugr.es/~romansg/material/WebEco/Eco2-Nolineales.pdf

Sancho, A. (s.f.). *Econometría de Económicas. Caso 2: función de producción Cobb-Douglas.* Recuperado el 29 de junio de 2015, de Universidad de Valencia: http://www.uv.es/sancho/funcion%20cobb%20douglas.pdf

Sancho, A.; Serrano, G.; Pérez , P. (2005). *Econometría. Ejercicios para el tema 1.* Recuperado el 28 de junio de 2015, de Universidad de Valencia: http://www.uv.es/~sancho/ejertema1.pdf

Stock, J. H.; Watson, M. W. (2012). *Introducción a la econometría.* Madrid: Pearson.

Trívez Bielsa, F. J. (2004). *Introducción a la econometría.* Madrid: Pirámide.

Wooldridge, J. M. (2001). *Introducción a la econometría: un enfoque moderno.* Australia: Thomson Learning.

ANEXO: TABLAS Y GRÁFICOS EVIEWS.

TABLAS.

GRÁFICOS.

TABLAS.

TABLA A.1

Dependent Variable: LNY
Method: Least Squares
Sample: 1980 2014
Included observations: 35

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.608188	0.586720	-4.445374	0.0001
LNK	0.498211	0.052656	9.461673	0.0000
LNL	0.558695	0.099693	5.604168	0.0000

R-squared	0.986955	Mean dependent var	6.638658
Adjusted R-squared	0.986140	S.D. dependent var	0.289581
S.E. of regression	0.034092	Akaike info criterion	-3.837686
Sum squared resid	0.037193	Schwarz criterion	-3.704371
Log likelihood	70.15951	Hannan-Quinn criter.	-3.791666
F-statistic	1210.541	Durbin-Watson stat	0.073569
Prob(F-statistic)	0.000000		

TABLA A.2

Chow Breakpoint Test: 1991 2008
Null Hypothesis: No breaks at specified breakpoints
Varying regressors: All equation variables
Equation Sample: 1980 2014

F-statistic	29.30489	Prob. F(6,26)	0.0000
Log likelihood ratio	71.72641	Prob. Chi-Square(6)	0.0000
Wald Statistic	175.8294	Prob. Chi-Square(6)	0.0000

TABLA A.3

Dependent Variable: LNY
Method: Least Squares
Sample: 1980 2014
Included observations: 35

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-4.494933	0.798785	-5.627215	0.0000
LNK	0.930869	0.069602	13.37420	0.0000
LNL	0.421758	0.117512	3.589059	0.0014
D1	2.797845	0.905089	3.091237	0.0047
D1*LNK	-0.362015	0.109279	-3.312748	0.0027
D1*LNL	-0.011548	0.159674	-0.072321	0.9429
D2	-1.242981	11.72229	-0.106036	0.9164
D2*LNK	-0.077800	0.970925	-0.080130	0.9367
D2*LNL	0.184985	0.401771	0.460425	0.6490

R-squared	0.998320	Mean dependent var	6.638658
Adjusted R-squared	0.997802	S.D. dependent var	0.289581
S.E. of regression	0.013575	Akaike info criterion	-5.544155
Sum squared resid	0.004791	Schwarz criterion	-5.144208
Log likelihood	106.0227	Hannan-Quinn criter.	-5.406094
F-statistic	1930.750	Durbin-Watson stat	0.683986
Prob(F-statistic)	0.000000		

TABLA A.4

Dependent Variable: LNY
Method: Least Squares
Sample: 1980 2014
Included observations: 35

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-4.456319	0.583070	-7.642858	0.0000
LNK	0.933662	0.056821	16.43167	0.0000
LNL	0.415504	0.078081	5.321463	0.0000
D1	2.739448	0.401266	6.827015	0.0000
D1*LNK	-0.368848	0.053895	-6.843782	0.0000
D2	-1.223198	11.50119	-0.106354	0.9161
D2*LNK	-0.073761	0.951294	-0.077538	0.9388
D2*LNL	0.179692	0.387702	0.463479	0.6467

R-squared	0.998319	Mean dependent var	6.638658
Adjusted R-squared	0.997883	S.D. dependent var	0.289581
S.E. of regression	0.013322	Akaike info criterion	-5.601097
Sum squared resid	0.004792	Schwarz criterion	-5.245589
Log likelihood	106.0192	Hannan-Quinn criter.	-5.478375
F-statistic	2290.978	Durbin-Watson stat	0.677926
Prob(F-statistic)	0.000000		

TABLA A.5

Dependent Variable: LNY
Method: Least Squares
Sample: 1980 2014
Included observations: 35

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-4.458660	0.571859	-7.796786	0.0000
LNK	0.933493	0.055762	16.74067	0.0000
LNL	0.415883	0.076532	5.434122	0.0000
D1	2.740551	0.393831	6.958697	0.0000
D1*LNK	-0.368991	0.052899	-6.975375	0.0000
D2	-2.108904	1.315908	-1.602623	0.1202
D2*LNL	0.207876	0.132439	1.569605	0.1277

R-squared	0.998319	Mean dependent var	6.638658
Adjusted R-squared	0.997959	S.D. dependent var	0.289581
S.E. of regression	0.013084	Akaike info criterion	-5.658017
Sum squared resid	0.004793	Schwarz criterion	-5.346947
Log likelihood	106.0153	Hannan-Quinn criter.	-5.550636
F-statistic	2771.183	Durbin-Watson stat	0.677391
Prob(F-statistic)	0.000000		

TABLA A.6

Dependent Variable: LNY
Method: Least Squares
Sample: 1980 2014
Included observations: 35

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-5.014353	0.460284	-10.89404	0.0000
LNK	0.893288	0.050765	17.59644	0.0000
LNL	0.505891	0.051946	9.738792	0.0000
D1	2.969483	0.374946	7.919766	0.0000
D1*LNK	-0.398699	0.050628	-7.875025	0.0000
D2	-0.043535	0.012370	-3.519309	0.0014

R-squared	0.998171	Mean dependent var	6.638658
Adjusted R-squared	0.997856	S.D. dependent var	0.289581
S.E. of regression	0.013410	Akaike info criterion	-5.630830
Sum squared resid	0.005215	Schwarz criterion	-5.364199
Log likelihood	104.5395	Hannan-Quinn criter.	-5.538789
F-statistic	3165.177	Durbin-Watson stat	0.707148
Prob(F-statistic)	0.000000		

TABLA A.7

Heteroskedasticity Test: White

F-statistic	1.793104	Prob. F(12,22)	0.1134
Obs*R-squared	17.30587	Prob. Chi-Square(12)	0.1384
Scaled explained SS	7.510020	Prob. Chi-Square(12)	0.8222

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample: 1980 2014
Included observations: 35
Collinear test regressors dropped from specification

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.602097	0.836231	1.915854	0.0685
LNK	0.060137	0.172461	0.348701	0.7306
LNK^2	-0.039258	0.016076	-2.441994	0.0231
LNK*LNL	0.054052	0.016124	3.352226	0.0029
LNK*D1	0.056297	0.175482	0.320813	0.7514
LNK*(D1*LNK)	-0.002354	0.011977	-0.196564	0.8460
LNK*D2	0.266580	0.197224	1.351662	0.1902
LNK*(D2*LNL)	-0.023318	0.018887	-1.234596	0.2300
LNL	-0.389156	0.116729	-3.333854	0.0030
LNL*D1	-0.021403	0.006563	-3.261076	0.0036
LNL*D2	-0.217703	0.172637	-1.261045	0.2205
LNL*(D2*LNL)	0.019032	0.016534	1.151043	0.2621
D1	-0.085467	0.658119	-0.129865	0.8979

TABLA A.8

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	25.81569	Prob. F(1,27)	0.0000
Obs*R-squared	17.10759	Prob. Chi-Square(1)	0.0000

TABLA A.9

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares
Sample: 1980 2014
Included observations: 35
Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.565453	0.487895	1.158966	0.2570
LNK	-0.011438	0.041960	-0.272602	0.7873
LNL	-0.051160	0.063978	-0.799647	0.4312
D1	-0.254679	0.306467	-0.831017	0.4135
D1*LNK	0.035149	0.041190	0.853324	0.4013
D2	-1.217658	1.099954	-1.107008	0.2784
D2*LNL	0.123561	0.110821	1.114962	0.2751
RESID(-1)	0.772640	0.185089	4.174419	0.0003
RESID(-2)	-0.006399	0.216660	-0.029534	0.9767

TABLA A.10

Dependent Variable: LNY
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1981 2014
Included observations: 34 after adjustments
Convergence achieved after 32 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.894850	1.129316	0.792382	0.4353
LNK	-0.154693	0.187818	-0.823632	0.4176
LNL	0.770801	0.079876	9.650007	0.0000
D1	-0.458145	0.964441	-0.475037	0.6387
D1*LNK	0.061119	0.128727	0.474799	0.6389
D2	0.574347	1.385095	0.414662	0.6818
D2*LNL	-0.057438	0.138728	-0.414036	0.6822
AR(1)	0.966297	0.013327	72.50476	0.0000

R-squared	0.999639	Mean dependent var	6.651881
Adjusted R-squared	0.999542	S.D. dependent var	0.283007
S.E. of regression	0.006057	Akaike info criterion	-7.172873
Sum squared resid	0.000954	Schwarz criterion	-6.813729
Log likelihood	129.9388	Hannan-Quinn criter.	-7.050395
F-statistic	10288.08	Durbin-Watson stat	1.497859
Prob(F-statistic)	0.000000		

TABLA A.11

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	1.014557	Prob. F(1,25)	0.3235
Obs*R-squared	1.325987	Prob. Chi-Square(1)	0.2495

TABLA A.12

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	3.244122	Prob. F(2,24)	0.0566
Obs*R-squared	7.235585	Prob. Chi-Square(2)	0.0268

TABLA A.13

Dependent Variable: LNY
Method: Least Squares
Sample: 1980 2014
Included observations: 35
Newey-West HAC Standard Errors & Covariance (lag truncation=3)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-4.458660	0.455598	-9.786396	0.0000
LNK	0.933493	0.045384	20.56876	0.0000
LNL	0.415883	0.054847	7.582634	0.0000
D1	2.740551	0.394805	6.941538	0.0000
D1*LNK	-0.368991	0.052618	-7.012655	0.0000
D2	-2.108904	0.725549	-2.906633	0.0071
D2*LNL	0.207876	0.073124	2.842779	0.0083

R-squared	0.998319	Mean dependent var	6.638658
Adjusted R-squared	0.997959	S.D. dependent var	0.289581
S.E. of regression	0.013084	Akaike info criterion	-5.658017
Sum squared resid	0.004793	Schwarz criterion	-5.346947
Log likelihood	106.0153	Hannan-Quinn criter.	-5.550636
F-statistic	2771.183	Durbin-Watson stat	0.677391
Prob(F-statistic)	0.000000		

GRÁFICOS.

GRÁFICO A.1

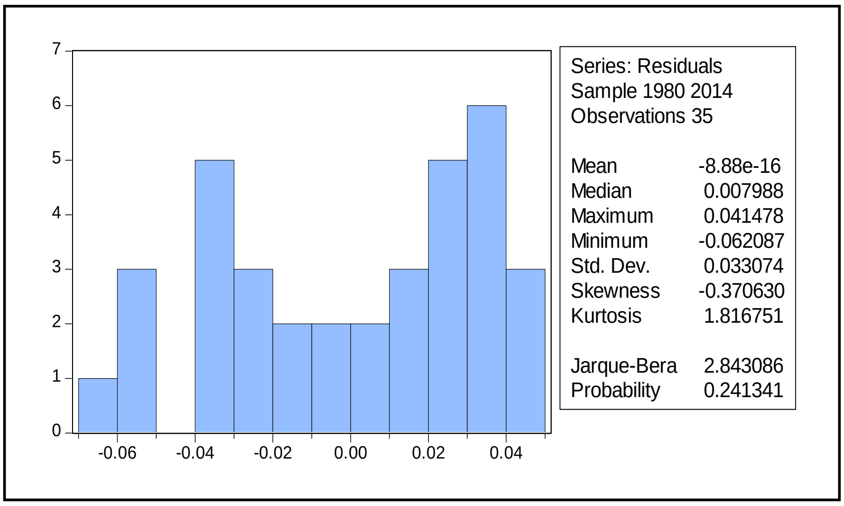

GRÁFICO A.2

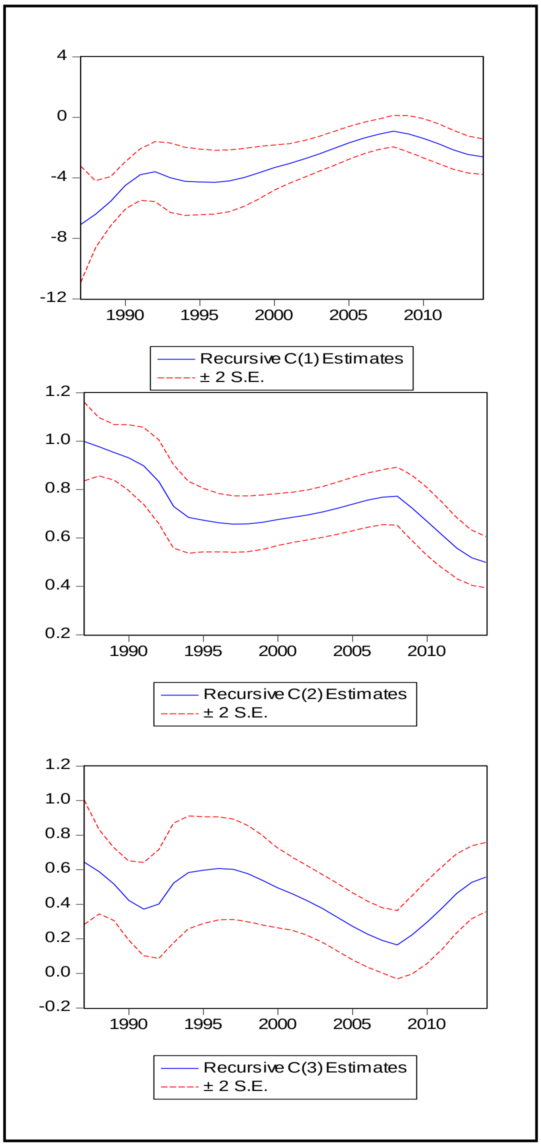

GRÁFICO A.3

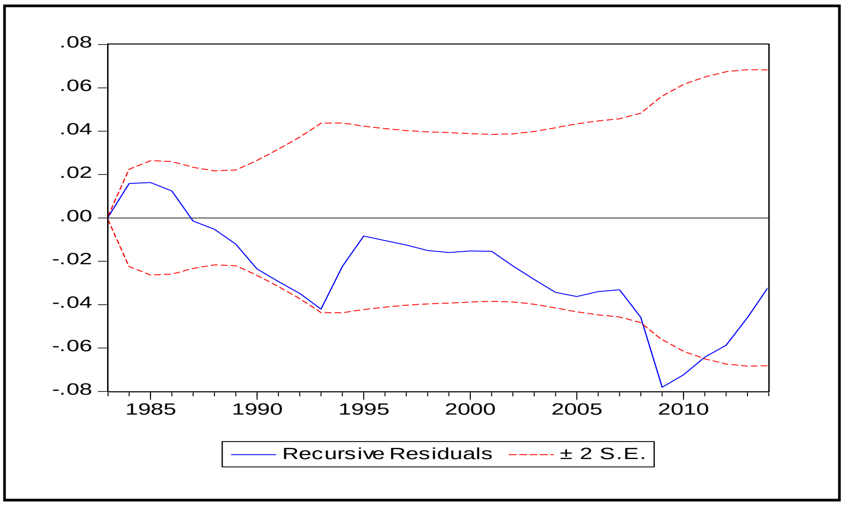

GRÁFICO A.4

Sample: 1980 2014
Included observations: 35

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.635	0.635	15.363	0.000
		2	0.297	-0.179	18.818	0.000
		3	0.059	-0.086	18.959	0.000
		4	-0.217	-0.299	20.920	0.000
		5	-0.454	-0.272	29.830	0.000
		6	-0.500	-0.084	40.985	0.000
		7	-0.420	-0.055	49.155	0.000
		8	-0.322	-0.114	54.131	0.000
		9	-0.190	-0.113	55.923	0.000
		10	-0.042	-0.119	56.016	0.000
		11	0.171	0.116	57.591	0.000
		12	0.239	-0.116	60.802	0.000
		13	0.238	-0.048	64.135	0.000
		14	0.205	-0.093	66.734	0.000
		15	0.106	-0.116	67.456	0.000
		16	0.017	0.019	67.475	0.000